

المهندس

محمود قاسم



المراجعة النهائية للصف الثاني الثانوي [أدبي]

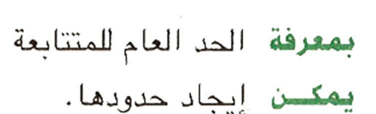
المتتابعة

التعريف المتتابعة هى دالة مجالها ص$^+$ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل هو ح

الصورة العامة $(ح_ن) = (ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، .... ، ح_ن ، ....)$

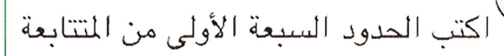
الحد العام ويسمى أيضًا الحد النونى ويرمز له بالرمز $ح_ن$ وهو صورة الحد الذى ترتيبه ن





بمعرفة الحد العام للمتتابعة
يمكن إيجاد حدودها.

بمعرفة بعض حدود المتتابعة
يمكن إدراك العلاقة بين ترتيب الحد وقيمته وتكوين الحد العام.





مثال

اكتب الحدود السبعة الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث : $ح_{ن+٢} = ح_ن + ح_{ن+١}$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

تسمى هذه المتتابعة متتابعة فيبوناتشي

الحل

$ح_١ = ح_٢ = ١$ ، $ح_٣ = ح_١ + ح_٢ = ٢$

، $ح_٤ = ح_٢ + ح_٣ = ١ + ٢ = ٣$

، $ح_٥ = ح_٣ + ح_٤ = ٢ + ٣ = ٥$

، $ح_٦ = ح_٤ + ح_٥ = ٣ + ٥ = ٨$

، $ح_٧ = ح_٥ + ح_٦ = ٥ + ٨ = ١٣$

∴ الحدود السبعة الأولى هى :

(١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣)

مثال

أوجد الحد العام للمتتابعة :

$(\frac{-١}{٦} ، \frac{١}{٧} ، \frac{-١}{٨} ، \frac{١}{٩} ، ....)$

ومنه أوجد قيمة : $ح_{١٠}$

تسمى هذه المتتابعة بالتذبذبية أ، متباينة الإشارة

الحل

بملاحظة العلاقة بين ترتيب الحد وقيمته نجد أن

ترتيب الحد : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ....

قيمة الحد : $-\frac{١}{٦} ، \frac{١}{٧} ، \frac{-١}{٨} ، \frac{١}{٩} ، ....$

ويمكن كتابة الحدود بعد إدراك العلاقة بين قيمتها وترتيبها

كالتالى : $\frac{(-١)^١}{٥+١} ، \frac{(-١)^٢}{٥+٢} ، \frac{(-١)^٣}{٥+٣} ، \frac{(-١)^٤}{٥+٤} ، ....$

∴ الحد العام هو $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٥+ن}$

∴ $ح_{١٠} = \frac{(-١)^{١٠}}{٥+١٠} = \frac{١}{١٥}$



أمثلة لبعض المتتابعات وحدها العام

- **المتتابعة:** (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....) حدها العام $ح_ن = ن^٢$
- **المتتابعة:** (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ....) حدها العام $ح_ن = ن^٣$
- **المتتابعة:** ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ....) حدها العام $ح_ن = (ن + ١)(ن + ٢)$
- **المتتابعة:** (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ....) حدها العام $ح_ن = ٢^ن$
- **المتتابعة:** (٢ ، ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ، ....) حدها العام $ح_ن = \frac{٢^ن}{ن}$

المتتابعة المنتهية

هى المتتابعة التى عدد حدودها محدود.

فمثلاً :

- المتتابعة : (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ١٧ ، .... ، ٣٧)

تكون منتهية.

- المتتابعة : $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{ن + ٥}{ن^٢}$

، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ تكون منتهية.

المتتابعة غير المنتهية

هى التى لها عدد غير منته من الحدود.

فمثلاً :

- المتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....)

غير منتهية.

- المتتابعة : $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ١ + ٣^ن$

، $ن \in ص^+$ تكون غير منتهية.

المتتابعة التزايدية

$ح_{ن+١} > ح_ن$ أى أن

$ح_{ن+١} - ح_ن > $ صفر

فمثلاً :

(١ ، ٩ ، ١٧ ، ٢٥ ، ....)

المتتابعة التناقصية

$ح_{ن+١} < ح_ن$ أى أن

$ح_{ن+١} - ح_ن < $ صفر

فمثلاً :

(١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....)

المتتابعة الثابتة

$ح_{ن+١} = ح_ن$ أى أن

$ح_{ن+١} - ح_ن = $ صفر

فمثلاً :

(−٣ ، −٣ ، −٣ ، −٣ ، ....)

م / محمود قاسم في الرياضيات
01100518441



مثال

بين أى المتتابعات الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها ثابتة :

(١) $(ح_ن) = \left(\frac{١}{ن}\right)$ (٢) $(ح_ن) = (٣^ن)$ (٣) $(ح_ن) = (٩)$

الحل

(١) $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{ن+١} - \frac{١}{ن} = \frac{ن - (ن+١)}{ن(ن+١)} = \frac{-١}{ن(ن+١)} <$ صفر لكل $ن \in ص^+$

∴ المتتابعة : $(ح_ن) = \left(\frac{١}{ن}\right)$ تناقصية.

(٢) $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣^{ن+١} - ٣^ن = ٣^ن(٣ - ١) = ٢ \times ٣^ن >$ صفر لكل $ن \in ص^+$.

∴ المتتابعة : $(ح_ن) = (٣^ن)$ تزايدية.

(٣) $ح_{ن+١} - ح_ن = ٩ - ٩ =$ صفر ∴ $(ح_ن) = (٩)$ ثابتة

المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة فإذا كانت المتتابعة :

$(ح_ر) = (ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ح_٤ ، .... ، ح_ر ، .... ، ح_ن)$

فإن المتسلسلة المرتبطة بها هى : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ر + ... + ح_ن$

وتكتب برمز التجميع $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$

فمثلاً :

① إذا كانت : $(ح_ر)$ متتابعة حدها العام $ح_ر = (-١)^{ر+١} ر^٢$

فإن المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٤} ح_ر = (-١)^٢ (١)^٢ + (-١)^٣ (٢)^٢ + (-١)^٤ (٣)^٢ + (-١)^٥ (٤)^٢$

$= ١ - ٤ + ٩ - ١٦ = -١٠$ (متسلسلة منتهية)

② إذا كانت : $(ح_ر)$ متتابعة حدها العام $ح_ر = \frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}$

فإن المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} ح_ر = \left(\frac{١}{١+١} - \frac{١}{١}\right) + \left(\frac{١}{٢+١} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣+١} - \frac{١}{٣}\right) + ...$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٦} + \frac{-١}{١٢} + \frac{-١}{٢٠} + ...$ (متسلسلة غير منتهية)

الخواص الجبرية لرمز التجميع (فى حالة مجموع متتابعة بدءًا من الحد الأول) :

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح} = \text{ح ن}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^٢ = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}\,\text{ع}_{\text{ر}} = \text{ح} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}} \pm \text{هـ}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} \pm \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{هـ}_{\text{ر}}$$

مع ملاحظة أن : $\sum_{\text{ر}=\text{م}}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} - \sum_{\text{ر}=١}^{\text{م}-١} \text{ع}_{\text{ر}}$

أمثلة

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٥} ٧ = ١٥ \times ٧ = ١٠٥$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{٨٠} \text{ر} = \frac{٨٠\,(٨٠+١)}{٢} = ٣٢٤٠$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} \text{ر}^٢ = \frac{١٠\,(١٠+١)\,(٢\times ١٠+١)}{٦}$$
$$= ٣٨٥$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{١٥} (\text{ر}^٢+\text{ر}+١) = \sum_{\text{ر}=١}^{١٥} \text{ر}^٢ + \sum_{\text{ر}=١}^{١٥} \text{ر}$$
$$+ \sum_{\text{ر}=١}^{١٥} ١ = \frac{١٥\,(١٥+١)\,(٢\times ١٥+١)}{٦}$$
$$+ \frac{١٥\,(١٥+١)}{٢} + ١ \times ١٥ = ١٣٧٥$$

$$\sum_{\text{ر}=٧}^{٢٣} ٣\,\text{ر} = ٣ \sum_{\text{ر}=٧}^{٢٣} \text{ر}$$
$$= ٣ \left(\sum_{\text{ر}=١}^{٢٣} \text{ر} - \sum_{\text{ر}=١}^{٦} \text{ر} \right) = ٣$$
$$\left[\frac{٢٣\,(٢٣+١)}{٢} - \frac{٦\,(٦+١)}{٢} \right] = ٧٦٥$$

$$\sum_{\text{ن}=٦}^{١٥} (٢٢-٢\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=١}^{١٥} (٢٢-٢\text{ن})$$
$$- \sum_{\text{ن}=١}^{٥} (٢٢-٢\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=١}^{١٥} ٢٢ - ٢ \sum_{\text{ن}=١}^{١٥} \text{ن}$$
$$- \sum_{\text{ن}=١}^{٥} ٢٢ + ٢ \sum_{\text{ن}=١}^{٥} \text{ن}$$
$$= ٢٢ \times ١٥ - ٢ \times \frac{١٥\,(١٥+١)}{٢}$$
$$- ٢٢ \times ٥ + ٢ \times \frac{٥\,(٥+١)}{٢} = ١٠$$

مجموع ٢٥ حدًا الأولى من المتتابعة (٣ − ٢ن) = $\sum_{\text{ن}=١}^{٢٥} (٣-٢\text{ن}) = \sum_{\text{ن}=١}^{٢٥} ٣ - ٢ \sum_{\text{ن}=١}^{٢٥} \text{ن}$

$$= ٢٥ \times ٣ - ٢ \times \frac{٢٥\,(٢٥+١)}{٢} = -٥٧٥$$

المتتابعة الحسابية | المتتابعة الهندسية

التعريـــف

المتتابعة الحسابية: الفرق بين كل حد عن الحد السابق له مباشرة يساوى مقدار ثابت **أى أن** : $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ء$

حيث ء مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة.

المتتابعة الهندسية: خارج قسمة كل حد على الحد السابق له مباشرة يساوى مقدار ثابت **أى أن** : $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = ر$

حيث ر مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة.

الصورة العامة

المتتابعة الحسابية: إذا كان الحد الأول أ ، الأساس ء ، الحد الأخير ل فإن :

$(ح_{ن}) = (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ....$
$، ل - ٢ء ، ل - ء ، ل)$

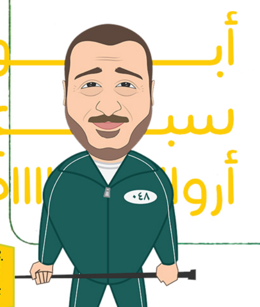
المتتابعة الهندسية: إذا كان الحد الأول أ ، الأساس ر ، الحد الأخير ل فإن :

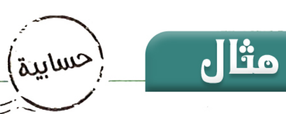
$(ح_{ن}) = (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، ....$
$، \frac{ل}{ر^{٢}} ، \frac{ل}{ر} ، ل)$

الحد العام

المتتابعة الحسابية: $ح_{ن} = أ + (ن - ١) ء$ وهو مقدار جبرى من الدرجة الأولى فى ن ومعامل ن وهو أساس المتتابعة

المتتابعة الهندسية: $ح_{ن} = أ ر^{ن - ١}$





فى المتتابعة الحسابية : (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ....)

أوجد : (١) قيمة $ح_{٨}$

(٢) رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢

الحل

$\because أ = ١٢ ، ء = ٢$

$\therefore ح_{٨} = ١٢ + ٧ \times ٢ = ٢٦$

، بفرض $ح_{ن} = ١٠٢$

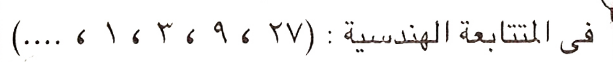
$\therefore ١٢ + (ن - ١) \times ٢ = ١٠٢$

$\therefore (ن - ١) \times ٢ = ٩٠$

$\therefore ن = ٤٦$

$\therefore ح_{٤٦} = ١٠٢$

مثال
هندسية



فى المتتابعة الهندسية : (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، ....)

أوجد : (١) قيمة $ح_{١٠}$

(٢) رتبة الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$

الحل

$\because أ = ٢٧ ، ر = \frac{١}{٣}$

$\therefore ح_{١٠} = ٢٧ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٩} = \frac{١}{٧٢٩}$

، بفرض $ح_{ن} = \frac{١}{٢٤٣}$

$\therefore ٢٧ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن - ١} = \frac{١}{٢٤٣}$

$\therefore \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن - ١} = \frac{١}{٦٥٦١} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨} \quad \therefore ن - ١ = ٨$

$\therefore ن = ٩ \quad \therefore ح_{٩} = \frac{١}{٢٤٣}$

مثال (حسابية)

بين إذا كانت المتتابعة حسابية أم لا وأوجد أساس المتتابعة الحسابية :

(١) $(ح_ن) = (٤ن - ٣)$

(٢) $(ح_ن) = (ن^٢ + ٥)$

الحل

(١) $ح_{ن+١} - ح_ن$

$= [٤(ن+١) - ٣] - [٤ن - ٣]$

$= ٤ن + ٤ - ٣ - ٤ن + ٣ = ٤$ (مقدار ثابت)

∴ المتتابعة حسابية والأساس = ٤

(٢) $ح_{ن+١} - ح_ن = [(ن+١)^٢ + ٥] - [ن^٢ + ٥]$

$= ن^٢ + ٢ن + ١ + ٥ - ن^٢ - ٥$

$= ٢ن + ١$ (مقدار يعتمد على قيمة ن)

∴ المتتابعة ليست حسابية.

مثال (هندسية)

بين أن المتتابعة $(ح_ن) = \left(\frac{٣}{٨} (٢)^ن\right)$ هى متتابعة هندسية ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨

الحل

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{٣}{٨} \times ٢^{ن+١}}{\frac{٣}{٨} \times ٢^ن} = ٢$ (مقدار ثابت)

∴ المتتابعة هندسية.

، بفرض $ح_ن = ٧٦٨$

∴ $\frac{٣}{٨} \times ٢^ن = ٧٦٨$

∴ $٢^ن = ٧٦٨ \times \frac{٨}{٣} = ٢٠٤٨ = ٢^{١١}$

∴ $ح_{١١} = ٧٦٨$

مثال (حسابية)

أوجد الحد الأوسط فى المتتابعة :

(٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، .... ، ١٢٨)

الحل

∵ ٥ - ٢ = ٨ - ٥ = ١١ - ٨ = ٣

∴ المتتابعة حسابية فيها : أ = ٢ ، ء = ٣

، بفرض $ح_ن = ١٢٨$

∴ $٢ + (ن - ١) \times ٣ = ١٢٨$

∴ ن = ٤٣ ∴ عدد حدود المتتابعة ٤٣

∴ الحد الأوسط هو $ح_{٢٢} = ٢ + ٢١ \times ٣ = ٦٥$

ملاحظة : الحد الأوسط فى المتتابعة الحسابية التى عدد حدودها فردى $= \frac{أ + ل}{٢} = \frac{٢ + ١٢٨}{٢} = ٦٥$

مثال (هندسية)

أوجد عدد حدود المتتابعة :

(٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، .... ، ٣٠٧٢)

الحل

∵ $\frac{١٢}{٦} = \frac{٢٤}{١٢} = \frac{٤٨}{٢٤} = ٢$

∴ المتتابعة هندسية فيها : أ = ٦ ، ر = ٢

، بفرض $ح_ن = ٣٠٧٢$

∴ $٦ \times ٢^{ن-١} = ٣٠٧٢$

∴ $٢^{ن-١} = ٥١٢ = ٢^٩$

∴ ن - ١ = ٩ ∴ ن = ١٠

∴ عدد حدود المتتابعة = ١٠ حدود

مثال (حسابية)

متتابعة حسابية حدها الثانى خمسة أمثال حدها السادس ومجموع مربعى حديها الأول والرابع ٤٠٥ فما هى المتتابعة ؟

الحل

∵ ح$_{٢}$ = ٥ ح$_{٦}$ ∴ أ + د = ٥ (أ + ٥ د)

∴ أ + د = ٥ أ + ٢٥ د

∴ أ = − ٦ د (١)

، ∵ ح$_{١}^{٢}$ + ح$_{٤}^{٢}$ = ٤٠٥

∴ أ^{٢} + (أ + ٣ د)^{٢} = ٤٠٥

∴ أ^{٢} + أ^{٢} + ٦ أ د + ٩ د^{٢} = ٤٠٥

وبالتعويض من (١) :

∴ ٢ (−٦ د)^{٢} + ٦ (−٦ د) د + ٩ د^{٢} = ٤٠٥

∴ ٧٢ د^{٢} − ٣٦ د^{٢} + ٩ د^{٢} = ٤٠٥

∴ د^{٢} = ٩

∴ د = ٣ ومنها أ = −١٨

وتكون المتتابعة : (−١٨ ، −١٥ ، −١٢ ، ...)

أ، د = −٣ ومنها أ = ١٨

وتكون المتتابعة : (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ...)

مثال (هندسية)

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٣ ومجموع مربعيهما يساوى ٥ أوجد المتتابعة ؟

الحل

∵ ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ٣ ∴ أ + (أ ر) = ٣

∴ أ (١ + ر) = ٣ (١)

، ∵ ح$_{١}^{٢}$ + ح$_{٢}^{٢}$ = ٥

∴ أ^{٢} + (أ ر)^{٢} = ٥

∴ أ^{٢} (أ + ر^{٢}) = ٥ (٢)

بتربيع المعادلة (١) :

∴ أ^{٢} (١ + ر)^{٢} = ٩ (٣)

بقسمة (٢) على (٣) :

∴ $\frac{\text{أ}^{٢} (١ + \text{ر}^{٢})}{\text{أ}^{٢} (١ + \text{ر})^{٢}} = \frac{٥}{٩}$

∴ ٩ + ٩ ر^{٢} = ٥ + ١٠ ر + ٥ ر^{٢}

∴ ٤ ر^{٢} − ١٠ ر + ٤ = ٠

∴ ٢ ر^{٢} − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ومنها أ $\left(١ + \frac{١}{٢}\right)$ = ٣

∴ أ = ٢

وتكون المتتابعة : (٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...)

أ، ر = ٢ ومنها أ (١ + ٢) = ٣

∴ أ = ١

وتكون المتتابعة : (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

∴ يوجد متتابعتان.

فى كل من المتتابعة الحسابية والهندسية

- لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من س
  نضع $ح_{ن} > س$
- لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من س
  نضع $ح_{ن} < س$

فى المتتابعة الحسابية

- لإيجاد رتبة أول حد موجب أو آخر حد موجب
  نضع $ح_{ن} >$ صفر
- لإيجاد أول حد سالب أو آخر حد سالب نضع
  $ح_{ن} <$ صفر

مثال (حسابية)

فى المتتابعة الحسابية :

(−٤٢ ، −٣٩ ، −٣٦ ، .... ، ٢١)

(١) أوجد رتبة أول حد موجب.

(٢) هل يوجد حد قيمته −١١ ؟

(٣) $ح_{٩}$ من النهاية

الحل

(١) أ = −٤٢ ، ء = ٣ نضع $ح_{ن} >$ صفر

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ > صفر

∴ (ن − ١) × ٣ > ٤٢

∴ (ن − ١) > ١٤ ∴ ن > ١٥

∴ $ح_{١٦}$ هو أول حد موجب.

(٢) نضع $ح_{ن}$ = −١١

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ = −١١

∴ (ن − ١) × ٣ = ٣١

∴ ن = ١١ $\frac{١}{٣}$ ∉ $ص^{+}$

∴ لا يوجد حد قيمته −١١

(٣) لإيجاد $ح_{٩}$ من النهاية نضع أ = ٢١ ، ء = −٣

∴ $ح_{٩}$ من النهاية = ٢١ + ٨ × −٣ = −٣

مثال (هندسية)

فى المتتابعة الهندسية :

(١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ....)

أوجد رتبة أول حد قيمته أصغر من ٠,١

الحل

أ = ١٠٢٤ ، ر = $\frac{١}{٢}$

∴ نضع $ح_{ن} <$ ٠,١

∴ ١٠٢٤ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ < ٠,١

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١} < \frac{١}{١٠٢٤٠}$ (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

∴ (ن − ١) لو $\frac{١}{٢}$ < لو $\frac{١}{١٠٢٤٠}$

(وبالقسمة على لو $\frac{١}{٢}$ وهو عدد سالب)

∴ (ن − ١) > لو $\frac{١}{١٠٢٤٠}$ ÷ لو $\frac{١}{٢}$

∴ ن > (لو $\frac{١}{١٠٢٤٠}$ ÷ لو $\frac{١}{٢}$) + ١

∴ $ح_{١٥}$ هو أول حد قيمته أقل من ٠,١

الوسط الحسابى

- الوسط الحسابى لقيمتين ؟ ، ب = $\frac{أ + ب}{٢}$
- الوسط الحسابى لعدة قيم عددها «ن» = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{ن}$
- إذا كان ؟ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى فإن ب هو الوسط الحسابى بين ؟ ، حـ أى

$ب = \frac{أ + حـ}{٢}$ ، أ ، $٢ ب = أ + حـ$

الوسط الهندسى

- الوسط الهندسى لقيمتين لهما نفس الإشارة ؟ ، ب هو $\pm \sqrt{أ ب}$
- الوسط الهندسى لعدة قيم موجبة عددها «ن» هو الجذر النونى لموجب لحاصل ضربهم
- إذا كان : ؟ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى فإن :

$ب = \pm \sqrt{أ حـ}$ ، أ ، $ب^٢ = أ حـ$



ملاحظات

- الوسط الحسابى لقيمتين موجبتين ≥ الوسط الهندسى لهما
- الوسط الحسابى لقيمتين موجبتين مختلفتين > الوسط الهندسى لهما
- لإدخال عدد ن وسط حسابى أو هندسى بين قيمتين ؟ ، ب فإننا نكون متتابعة حسابية أو هندسية يكون فيها الحد الأول $ع_١ = أ$ ، عدد الحدود = ن + ٢ والحد الأخير $ل = ع_{ن+٢} = ب$
- الوسط الذى ترتيبه ن = $ع_{ن+١}$ فمثلًا الوسط الخامس = $ع_٦$

مثال



أدخل ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ ثم اكتب المتتابعة الناتجة وأوجد الوسط العاشر

الحل

؟ = ٤ ، ل = ٩١ ∵ عدد الأوساط = ٢٨

∴ عدد الحدود = ٢٨ + ٢ = ٣٠

∴ $ع_{٣٠}$ = ٩١ ∴ ٤ + ٢٩ × ء = ٩١

∴ ء = ٣

∴ المتتابعة الناتجة : (٤ ، ٧ ، ١٠ ، .... ، ٩١)

، الوسط العاشر = $ع_{١١}$ = ٤ + ١٠ × ٣ = ٣٤

مثال



أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

الحل

؟ = $\frac{١}{٤}$ ، ل = ٣٢ ∵ عدد الأوساط = ٦

∴ عدد الحدود = ٦ + ٢ = ٨

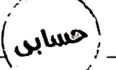
∴ $ع_٨$ = ٣٢ ∴ $\frac{١}{٤} \times ر^٧ = ٣٢$

∴ $ر^٧ = ١٢٨ = ٢^٧$ ∴ ر = ٢

∴ الأوساط هى : $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦

م / محمود قاسم في الرياضيات
01100518441





إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٣ ، ٣٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ٣ : ١٦ فما عدد تلك الأوساط.

الحل

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين ٣ ، ٣٥ نحصل على المتتابعة :

(٣ ، ٣ + ء ، ٣ + ٢ء ، .... ، ٣٥ − ٢ء ، ٣٥ − ء ، ٣٥)

$\therefore \frac{\text{٣} + \text{ء} + \text{٣} + \text{٢ء}}{\text{٣٥} - \text{٢ء} + \text{٣٥} - \text{ء}} = \frac{\text{٣}}{\text{١٦}}$

$\therefore \frac{\text{٦} + \text{٣ء}}{\text{٧٠} - \text{٣ء}} = \frac{\text{٣}}{\text{١٦}}$

∴ ٩٦ + ٤٨ء = ٢١٠ − ٩ء

∴ ٥٧ء = ١١٤ ∴ ء = ٢

وبفرض عدد الأوساط ن

∴ الحد الأخير ل = $\text{ح}_{\text{ن}+\text{٢}}$

∴ ٣٥ = ٣ + (ن + ١) × ٢

∴ ن = ١٥

مثال (هندسى)

إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٨١ ، $\frac{\text{١}}{\text{٧٢٩}}$ كان مجموع الوسطين الأولين ٣٦ أوجد عدد هذه الأوساط الهندسية.

الحل

بفرض عدد الأوساط = ن

∴ أ = ٨١ ، $\text{ح}_{\text{ن}+\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٧٢٩}}$ ،

، مجموع الوسطين الأولين = ٣٦

∴ $\text{ح}_{\text{٢}} + \text{ح}_{\text{٣}}$ = ٣٦

∴ ٨١ ر + ٨١ $\text{ر}^{\text{٢}}$ = ٣٦

∴ ٩ $\text{ر}^{\text{٢}}$ + ٩ ر − ٤ = ٠

∴ (٣ ر + ٤) (٣ ر − ١) = ٠

∴ ر = − $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ (مرفوض لأن الحد الأخير $\frac{\text{١}}{\text{٧٢٩}}$ أصغر من الحد الأول ٨١)

أ، ر = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

، ∵ $\text{ح}_{\text{ن}+\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٧٢٩}}$

$\therefore \text{٨١} \left(\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}+\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٧٢٩}}$

$\therefore \left(\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}+\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٧٢٩} \times \text{٨١}}$

«وبأخذ لوغاريتم للأساس $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ للطرفين»

∴ ن + ١ = ١٠ ∴ ن = ٩

∴ عدد الأوساط = ٩



مثال

عددان موجبان وسطهما الهندسى ٢٠ ووسطهما الحسابى يزيد عن وسطهما الهندسى بمقدار ٥ أوجد العددين :

الحل

بفرض العددين ٢ ، ب

، ∵ الوسط الهندسى لهما = ٢٠

∴ ٢ ب = (٢٠)^{٢} = ٤٠٠ (١)

، ∵ وسطهما الحسابى = ٢٥

∴ ٢ + ب = ٢ × ٢٥ = ٥٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ العددين هما : ١٠ ، ٤٠

مثال

إذا كان : ٦ ٢ ، ٣ ب ، ٢ حـ ، ٢ ء كميات موجبة في تتابع حسابى أثبت أن : ب حـ > ٢ ٢ ء

الحل

∵ الوسط الحسابى لعددين موجبين مختلفين > وسطهما الهندسى

∴ ٣ ب وسط حسابى بين ٦ ٢ ، ٢ حـ

∴ ٣ ب > $\sqrt{\text{١٢ ٢ حـ}}$

∴ ٩ ب^{٢} > ١٢ ٢ حـ (١)

، ∵ ٢ حـ وسط حسابى بين ٣ ب ، ٢ ء

∴ ٢ حـ > $\sqrt{\text{٦ ب ء}}$ ∴ ٤ حـ^{٢} > ٦ ب ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٣٦ ب^{٢} حـ^{٢} > ٧٢ ٢ ب حـ ء

، ∵ الكميات موجبة. ∴ ب حـ > ٢ ٢ ء

المتسلسلة الحسابية

هى مجموع حدود متتابعة حسابية حدها الأول ٢ ، أساسها ء ، حدها الأخير ل ، عدد حدودها ن

أى أن :

• حـ$_{ن}$ = ٢ + (٢ + ء) + (٢ + ٢ ء) + ... + (ل − ء) + ل

• حـ$_{ن}$ = $\sum_{ر=١}^{ن}$ [٢ + (ن − ١) ء]

• حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ ٢ + (ن − ١) ء]

• حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (٢ + ل)

المتسلسلة الهندسية

هى مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول ٢ ، أساسها ر ≠ ١ ، حدها الأخير ل وعدد حدودها ن

أى أن :

• حـ$_{ن}$ = ٢ + ٢ ر + ٢ ر^{٢} + ... + $\frac{ل}{ر}$ + ل

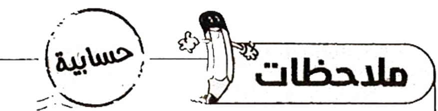
• حـ$_{ن}$ = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ٢ ر$^{ن-١}$

• حـ$_{ن}$ = $\frac{٢ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ = $\frac{٢ (١ - ر^{ن})}{١ - ر}$

• حـ$_{ن}$ = $\frac{ل ر - ٢}{ر - ١}$

• فى حالة | ر | < ١ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية حيث :

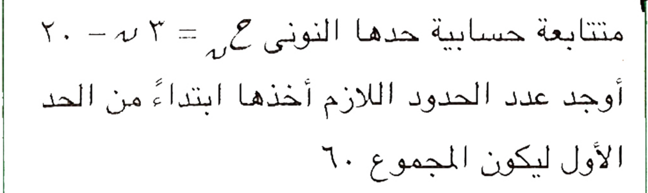
حـ$_{\infty}$ = $\frac{٢}{١ - ر}$





* $ح_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-١}$ حيث $ن > ١$
* أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية = مجموع الحدود الموجبة فقط.
* أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية = مجموع الحدود السالبة فقط.
* لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع موجب نضع $جـ_{ن} >$ صفر
* لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع سالب نضع $جـ_{ن} <$ صفر

مثال


متتابعة حسابية حدها النونى $ح_{ن} = ٣ن - ٢٠$ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٦٠

الحل

$(ح_{ن})$ متتابعة حسابية حدها الأول

$أ = ح_{١} = ٣ - ٢٠ = -١٧$ ، الأساس $ء = ٣$

وبفرض $جـ_{ن} = ٦٠$

$\therefore \frac{ن}{٢}\left[٢(-١٧) + (ن-١) \times ٣\right] = ٦٠$

$\therefore ن(-٣٤ + ٣ن - ٣) = ١٢٠$

$\therefore ن(٣ن - ٣٧) = ١٢٠$

$\therefore ٣ن^{٢} - ٣٧ن - ١٢٠ = ٠$

$\therefore (ن - ١٥)(٣ن + ٨) = ٠$

$\therefore ن = \frac{-٨}{٣}$ (مرفوض) أ، $ن = ١٥$

$\therefore$ عدد الحدود $= ١٥$



* $ح_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-١}$ حيث $ن > ١$
* أكبر مجموع للمتتابعة الهندسية التقاربية $= جـ_{\infty}$
* لتحويل العدد العشرى الدائر $٣,\overline{٢٤}$ إلى كسر اعتيادى نكتبه على صورة متسلسلة هندسية كالتالى :

$٣,\overline{٢٤} = ٣ + ٠,٢٤ + ٠,٠٠٢٤ +$

$+ ٠,٠٠٠٠٢٤ + ... = ٣ + \frac{٠,٢٤}{١ - ٠,٠١}$

$= ٣ \frac{٨}{٣٣}$

مثال

كم حداً يجب أخذه من حدود المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ....) ابتداءً من حدها الأول حتى يكون المجموع ٦٥٦٠ ؟

الحل

$\because أ = ٢$ ، $ر = \frac{٦}{٢} = ٣$

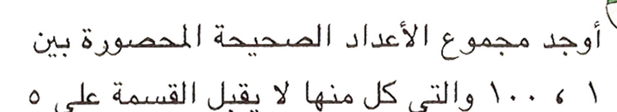
وبفرض $جـ_{ن} = ٦٥٦٠$

$\therefore \frac{٢(٣^{ن} - ١)}{٣ - ١} = ٦٥٦٠$

$\therefore ٣^{ن} - ١ = ٦٥٦٠$

$\therefore ٣^{ن} = ٦٥٦١ = ٣^{٨}$

$\therefore ن = ٨$ $\therefore$ عدد الحدود $= ٨$



مثال

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ١٠٠ والتى كل منها لا يقبل القسمة على ٥

الحل

الأعداد الصحيحة بين ١ ، ١٠٠ هى :

٢ ، ٣ ، ٤ ، .... ، ٩٩ وعددهم ٩٨

∴ مجموعهم $= \frac{٩٨}{٢}\left[٢ + ٩٩\right] = ٤٩٤٩$ (١)

، الأعداد التى تقبل القسمة على ٥ هى :

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، .... ، ٩٥ وهى حدود متتابعة حسابية فيها أ = ٥ ، ء = ٥ ، $ح_ن = ٩٥$

∴ $٥ + (ن - ١) \times ٥ = ٩٥$

∴ $ن = ١٩$

∴ مجموع الأعداد التى تقبل القسمة على ٥

$= \frac{١٩}{٢}(٥ + ٩٥) = ٩٥٠$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٥

$= ٤٩٤٩ - ٩٥٠ = ٣٩٩٩$

مثال

أوجد مجموع المتسلسلة :

(١) $\sum_{ر=٥}^{١١} ١٦\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ر-١}$

(٢) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦\left(\frac{٣}{٤}\right)^{ر-١}$

الحل

(١) المطلوب مجموع متتابعة هندسية حدها الأول ١٦ وأساسها $\frac{٣}{٢}$ بدءًا من الحد الخامس إلى الحادى عشر وهو يساوى $ج_{١١} - ج_٤$

$$= \frac{١٦\left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١} - ١\right)}{\frac{٣}{٢} - ١} - \frac{١٦\left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤} - ١\right)}{\frac{٣}{٢} - ١}$$

$= ٢٦٠٥ \frac{٥٩}{٦٤}$

(٢) المطلوب مجموع متتابعة هندسية حدها الأول ٥٦ وأساسها $\frac{٣}{٤}$ إلى ∞ من الحدود

∴ $\sum_{ر=١}^{\infty} ٥٦\left(\frac{٣}{٤}\right)^{ر-١} = \frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}} = ٢٢٤$

مثال

متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ أوجد المتتابعة

الحل

المتتابعة هى : (أ ، أر ، أ$ر^٢$ ، ....)

، ∵ $أ = \frac{أر}{١ - ر}$ ∴ $ر = ١ - ر$ ∴ $ر = \frac{١}{٢}$

، ∵ $أ + أر = ٩$ ∴ $أ\left(١ + \frac{١}{٢}\right) = ٩$ ∴ $أ = ٦$

∴ المتتابعة هى : (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ....)

مثال

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة الهندسية (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ....) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.

الحل

بوضع $ح_{ن}$ < صفر

∴ $\frac{ن}{٢}\left[٢(٢٥) + (ن - ١) \times -٣\right]$ < صفر

∴ $٥٠ + (ن - ١) \times -٣$ < صفر

∴ $-٣ن < -٥٣$ ∴ $ن > ١٧ \frac{٢}{٣}$

∴ أصغر عدد من الحدود بحيث يكون المجموع سالب هو ١٨ حد.

مثال

متتابعة حسابية مجموع العشرين حدًا الأولى منها ١٩٠ ، مجموع العشرة حدود التالية لها ٣٩٥ أوجد المتتابعة

الحل

∵ $ح_{٢٠}$ الأولى = ١٩٠

∴ $\frac{٢٠}{٢}\left[٢أ + ١٩ء\right] = ١٩٠$

∴ $٢أ + ١٩ء = ١٩$ (١)

، ∵ مجموع العشرة حدود التالية = ٣٩٥

∴ $\frac{١٠}{٢}\left[ح_{٢١} + ح_{٣٠}\right] = ٣٩٥$

∴ $٥\left[أ + ٢٠ء + أ + ٢٩ء\right] = ٣٩٥$

∴ $٢أ + ٤٩ء = ٧٩$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ $٣٠ء = ٦٠$

∴ ء = ٢ ، أ = −٩,٥

∴ المتتابعة هي: (−٩,٥ ، −٧,٥ ، −٥,٥ ، ....)

مثال

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثالث يساوى ٢٠ ، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوى ٢٦ ، بين أن هناك متتابعتين تحققان ذلك وأنه يمكن جمع عدد غير منته من حدود إحداهما ثم أوجد ذلك المجموع ابتداءً من الحد الأول.

الحل

∵ $أ + أر^{٢} = ٢٠$

∴ $أ(١ + ر^{٢}) = ٢٠$ (١)

، $أ + أر + أر^{٢} = ٢٦$

∴ $أ(١ + ر + ر^{٢}) = ٢٦$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) :

∴ $\frac{١ + ر^{٢}}{١ + ر + ر^{٢}} = \frac{١٠}{١٣}$

∴ $١٣ + ١٣ر^{٢} = ١٠ + ١٠ر + ١٠ر^{٢}$

∴ $٣ر^{٢} - ١٠ر + ٣ = ٠$

∴ $(٣ر - ١)(ر - ٣) = ٠$

∴ ر = ٣ ومن (١)

∴ أ = ٢ ، المتتابعة هى : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ....)

أ، $ر = \frac{١}{٣}$ ومن (١) : ∴ أ = ١٨

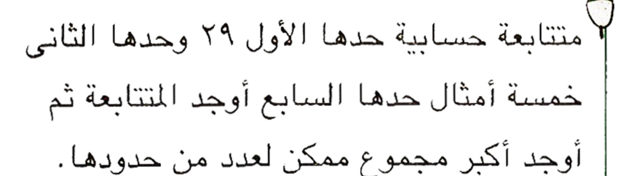
، المتتابعة هى : (١٨ ، ٦ ، ٢ ، ....)

أى أنه يوجد متتابعتان

، ∵المتتابعة الثانية فيها $ر = \frac{١}{٣}$

∴ يمكن جمع عدد غير منته من حدودها حيث

$ح_{\infty} = \frac{١٨}{١ - \frac{١}{٣}} = ٢٧$



متتابعة حسابية حدها الأول ٢٩ وحدها الثانى خمسة أمثال حدها السابع أوجد المتتابعة ثم أوجد أكبر مجموع ممكن لعدد من حدودها.

الحل

∵ أ = ٢٩ ، ح$_{٢}$ = ٥ ح$_{٧}$

∴ أ + د = ٥ (أ + ٦ د) ∴ ٢٩ د = −٤ أ

∴ ٢٩ د = −٤ (٢٩) ∴ د = −٤

∴ المتتابعة هى : (٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ....)

، المجموع يكون أكبر ما يمكن عند أخذ كل الحدود الموجبة فقط

∴ ح$_{ن}$ > صفر

∴ أ + (ن − ١) د > صفر

∴ ٢٩ − ٤ (ن − ١) > صفر

∴ ن < $\frac{٣٣}{٤}$ ∴ ن = ٨ أ، ٧ أ، ....

∴ أكبر مجموع = جـ$_{٨}$

= $\frac{٨}{٢}$ [٢ (٢٩) + ٧ × −٤] = ١٢٠

مثال

متتابعة هندسية غير منتهية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ١٨ ومجموع مربعات تلك الحدود إلى ∞ يساوى ١٠٨ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $\frac{أ}{١ - ر}$ = ١٨ ∴ أ = ١٨ (١ − ر) (١)

، ∵ مجموع مربعات حدودها إلى ∞ هو مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول أ^{٢} والأساس ر^{٢}.

∴ $\frac{أ^{٢}}{١ - ر^{٢}}$ = ١٠٨ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\frac{(١٨)^{٢} (١ - ر)^{٢}}{(١ - ر)(١ + ر)}$ = ١٠٨ ∴ $\frac{١ - ر}{١ + ر}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ ٣ − ٣ ر = ١ + ر ∴ ٤ ر = ٢

∴ ر = $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ١٨ $\left(١ - \frac{١}{٢}\right)$ = ٩

∴ المتتابعة هى : $\left(٩ ، \frac{٩}{٢} ، \frac{٩}{٤} ، ....\right)$

مثال

إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون جـ$_{ن}$ = ١٢٨ − ٢$^{٧ - ن}$ فأوجد المتتابعة ثم أوجد أكبر مجموع لحدودها.

الحل

∵ جـ$_{ن}$ = ١٢٨ − ٢$^{٧ - ن}$ ∴ جـ$_{١}$ = ١٢٨ − ٢$^{٧ - ١}$ = ٦٤ = ح$_{١}$

، جـ$_{٢}$ = ١٢٨ − ٢$^{٧ - ٢}$ = ٩٦ = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ ∴ ح$_{٢}$ = ٩٦ − ٦٤ = ٣٢

∴ ر = $\frac{ح_{٢}}{ح_{١}}$ = $\frac{٣٢}{٦٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ المتتابعة هى : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....)

∴ أكبر مجموع لحدودها = جـ$_{\infty}$ = $\frac{٦٤}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ١٢٨

مضروب العدد

- مضروب العدد ن = |ن = ن (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) × .... × ٣ × ٢ × ١

فمثلاً : |٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

- |ن = ن |ن − ١   فمثلاً : |٥ = ٥ |٤
- |ن يقبل القسمة على |م إذا كان : م ≤ ن
- |٠ = |١ = ١ ، إذا كان : |ن = ١ فإن : ن = صفر أ، ن = ١

التباديل

- $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) .... (ن − ر + ١)   فمثلاً : $^{٧}ل_{٣}$ = ٧ × ٦ × ٥
- $^{ن}ل_{ر}$ = $\frac{|ن}{|ن - ر}$ فمثلاً : $^{٥}ل_{٢}$ = $\frac{|٥}{|٣}$ = ٢٠
- $^{ن}ل_{.}$ = ١ ، إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ١ ، ن ≠ ١   فإن : ر = صفر
- $^{ن}ل_{ن}$ = |ن   فمثلاً : $^{٣}ل_{٣}$ = |٣ = ٦

التوافيق

- $^{ن}ق_{ر}$ = $\frac{^{ن}ل_{ر}}{|ر}$ = $\frac{|ن}{|ر \; |ن - ر}$ فمثلاً : $^{٥}ق_{٣}$ = $\frac{^{٥}ل_{٣}}{|٣}$ = $\frac{|٥}{|٣ \; |٢}$
- $^{ن}ق_{ر}$ = $^{ن}ق_{ن-ر}$ فمثلاً : $^{٧}ق_{٦}$ = $^{٧}ق_{١}$ = ٧
- $^{ن}ق_{ن}$ = $^{ن}ق_{.}$ = ١ ، $^{ن}ق_{١}$ = ن
- إذا كان : $^{ن}ق_{س}$ = $^{ن}ق_{ص}$ فإن : س = ص أ، س + ص = ن
- $^{ن}ق_{.}$ + $^{ن}ق_{١}$ + $^{ن}ق_{٢}$ + $^{ن}ق_{٣}$ + $^{ن}ق_{٤}$ + ... + $^{ن}ق_{ن}$ = $٢^{ن}$



ملاحظات

① $^{ن}ل_{ر} \in ص^{+}$ ، $^{ن}ق_{ر} \in ص^{+}$ ، $ن \in ص^{+}$ ، $ر \in ط$ بحيث $ر \leq ن$

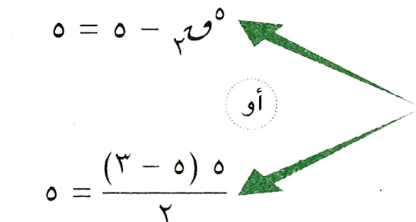
② لا معنى للحديث عن $^{١٦}ق_{٢٫}$ ، $^{٦}ق_{-٢}$ ، $^{٦}ق_{٥٫٫}$ ، $^{١٦}ل_{٢٫}$ ، $^{٦}ل_{-٢}$ ، $^{٦}ل_{٥٫٫٫}$ وهكذا ....

③ التبديل يكون بدون تكرار مع مراعاة الترتيب أما التوفيق فهو بدون تكرار أيضًا لكن مع عدم مراعاة الترتيب.

④ • عدد كل القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس مضلع محدب به ن ضلع = $^{ن}ق_{٢}$

• عدد أقطار المضلع المحدب الذى به ن ضلع = $^{ن}ق_{٢} - ن = \frac{ن(ن - ٣)}{٢}$

فمثلًا عدد أقطار المضلع الخماسى



$^{٥}ق_{٢} - ٥ = ٥$

أو

$\frac{٥(٥ - ٣)}{٢} = ٥$

ترتيب ن من الأشياء المتمايزة



فى صف: فإن عدد طرق الترتيب = $\underline{|ن}$

فى دائرة: فإن عدد طرق الترتيب = $\underline{|ن - ١}$

فمثلًا

عدد طرق ترتيب ٧ طلاب فى صف

$= \underline{|٧} = ٥٠٤٠$

فمثلًا

عدد طرق ترتيب ٧ طلاب فى دائرة

$= \underline{|٦} = ٧٢٠$

مثال

إذا كان : $\underline{|ن - ٤} = ١٢٠$ **أوجد قيمة : ن**

الحل

$\because \underline{|ن - ٤} = ١٢٠ = \underline{|٥}$

$\therefore ن - ٤ = ٥$ $\qquad$ $\therefore ن = ٩$

مثال

إذا كان : $ن \underline{|٢ن - ١} = ١٢$ **أوجد قيمة : ن**

الحل

$\because ن \underline{|٢ن - ١} = ١٢$

$\therefore ٢ن \underline{|٢ن - ١} = ٢٤$ $\qquad$ $\therefore \underline{|٢ن} = ٢٤ = \underline{|٤}$

$\therefore ٢ن = ٤$ $\qquad$ $\therefore ن = ٢$

مثال

إذا كان : $\underline{|ن + ١} = ٣٠ \underline{|ن - ١}$

أوجد قيمة : ن

الحل

$\because \underline{|ن + ١} = ٣٠ \underline{|ن - ١}$

$\therefore (ن + ١) ن \underline{|ن - ١} = ٣٠ \underline{|ن - ١}$

$\therefore ن (ن + ١) = ٣٠ = ٥ \times ٦$

$\therefore ن = ٥$

مثال

$$\frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{٢}{\underline{|ن + ١}} = \frac{٥٦}{\underline{|ن + ٢}}$$

الحل

$$\frac{\underline{|ن + ١} + ٢ \underline{|ن}}{\underline{|ن} \ \underline{|ن + ١}} = \frac{٥٦}{\underline{|ن + ٢}}$$

$$\therefore \frac{\underline{|ن} \left((ن + ١) + ٢\right)}{\underline{|ن + ١} \ \underline{|ن}} = \frac{٥٦}{(ن + ٢) \underline{|ن + ١}}$$

$$\therefore ن + ٣ = \frac{٥٦}{ن + ٢}$$

$\therefore (ن + ٣)(ن + ٢) = ٨ \times ٧$ $\qquad$ $\therefore ن = ٥$

مثال

إذا كان : $^{ن}ل_{٣} = ٩٠ ن$ **أوجد قيمة : ن**

الحل

$\because {}^{ن}ل_{٣} = ٩٠ ن$ $\qquad$ $\therefore \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٣}} = ٩٠ ن$

$$\therefore \frac{ن (ن - ١)(ن - ٢) \underline{|ن - ٣}}{\underline{|ن - ٣}} = ٩٠ ن$$

$\therefore (ن - ١)(ن - ٢) = ٩٠ = ١٠ \times ٩$

$\therefore ن = ١١$

مثال

إذا كان : $^{٥}ل_{ر + ١} = ٦٠$

أوجد قيمة : ر

الحل

$\because {}^{٥}ل_{ر + ١} = ٦٠ = {}^{٥}ل_{٣}$

$\therefore ر + ١ = ٣$ $\qquad$ $\therefore ر = ٢$

مثال

إذا كان : ${}^{٥}ل_{ر} = ٢ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ **أوجد :** ر

الحل

$\frac{|٥}{|٥ - ر} = ٢ \times \frac{|٦}{|٦ - ر + ١}$

∴ $\frac{|٥}{|٥ - ر} = ٢ \times \frac{٦ |٥}{(٧ - ر)(٦ - ر)|٥ - ر}$

∴ $(٧ - ر)(٦ - ر) = ١٢ = ٤ \times ٣$

∴ ر = ٣

مثال

إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ أوجد ${}^{٢٥}ق_{ن}$

الحل

ن = ١٠ + ١٤ = ٢٤



∴ ${}^{٢٥}ق_{ن} = {}^{٢٥}ق_{٢٤} = {}^{٢٥}ق_{١} = ٢٥$



مثال

إذا كان :

$|٣ن - ٧ = ١٢٠$ **أوجد قيمة :** ${}^{ن}ق_{ن-١}$

الحل

$|٣ن - ٧ = ١٢٠ = |٥$

∴ ٣ن − ٧ = ٥ ∴ ٣ن = ١٢

∴ ن = ٤ ∴ ${}^{ن}ق_{ن-١} = {}^{٤}ق_{٣} = {}^{٤}ق_{١} = ٤$

مثال

إذا كان : ${}^{٢٥}ق_{٢ر+١} = {}^{٢٥}ق_{٣ر-١}$

أوجد : ر

الحل

٢ر + ١ = ٣ر − ١ ∴ ر = ٢

أ، ٢ر + ١ + ٣ر − ١ = ٢٥

∴ ٥ر = ٢٥ ∴ ر = ٥

مثال

إذا كان : ${}^{٢ن+م}ق_{٢} = ١٩٠$ ، ${}^{ن-٢م}ل_{٣} = ٦٠$ **أوجد :** م ، ن

الحل

${}^{٢ن+م}ق_{٢} = \frac{{}^{٢ن+م}ل_{٢}}{|٢} = ١٩٠$

∴ ${}^{٢ن+م}ل_{٢} = ٣٨٠ = {}^{٢٠}ل_{٢}$ ∴ ٢ن + م = ٢٠ (١)

، ${}^{ن-٢م}ل_{٣} = ٦٠ = {}^{٥}ل_{٣}$ ∴ ن − ٢م = ٥ (٢)

بحل (١) ، (٢) : ∴ ن = ٩ ، م = ٢



مثال

إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$

أوجد قيمة كل من ن ، ر

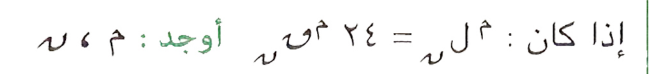
الحل

$\because {}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ $\quad\therefore ١٢٠ = \frac{٧٢٠}{\underline{|ر}}$

$\therefore \underline{|ر} = ٦$ $\quad\therefore ر = ٣$

، $\because {}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠ = {}^{١٠}ل_{٣}$ $\quad\therefore ن = ١٠$



مثال

إذا كان : ${}^{م}ل_{ن} = ٢٤ \; {}^{م}ق_{ن}$ أوجد : م ، ن

الحل

$\frac{{}^{م}ل_{ن}}{٢٤} = {}^{م}ق_{ن} = \frac{{}^{م}ل_{ن}}{\underline{|ن}}$

$\therefore \underline{|ن} = ٢٤$ $\quad\therefore ن = ٤$

$\therefore {}^{م}ل_{٤} = ٢٤ \times {}^{م}ق_{٤}$

$\therefore \frac{\underline{|م}}{\underline{|م - ٤}} = ٢٤ \times \frac{\underline{|م}}{\underline{|م - ٤}\;\underline{|٤}}$ ،

$\therefore$ وهذا يتحقق لكل قيم م الممكنة

أى أن م $\geq$ ٤ ، م $\in$ ص$^{+}$

مثال

أوجد قيمة :

(١) ${}^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥}$

(٢) ${}^{٥}ق_{٠} - {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} - {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} - {}^{٥}ق_{٥}$

الحل

(١) ${}^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥} = ٢^{٥} = ٣٢$

(٢) $\because {}^{٥}ق_{٠} = {}^{٥}ق_{٥}$ ، ${}^{٥}ق_{١} = {}^{٥}ق_{٤}$ ، ${}^{٥}ق_{٢} = {}^{٥}ق_{٣}$

$\therefore {}^{٥}ق_{٠} - {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} - {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} - {}^{٥}ق_{٥} = ٠$



إجراء عمليتين أو أكثر معًا	إجراء عملية تكوين ترتيبات لأشياء مختلفة دون تكرار	إجراء عملية تكوين مجموعات من أشياء مختلفة دون تكرار
مبدأ العد	**التباديل**	**التوافيق**

مبدأ العد

إذا كانت العملية أ يمكن إجراؤها بعدد $م_1$ من الطرق ، العملية ب يمكن إجراؤها بعدد $م_2$ من الطرق وهكذا ... إلى العملية ك التي يمكن إجراؤها بعدد $م_ر$ من الطرق فإن :

- قاعدة الضرب :

عدد طرق إجراء العملية أ و ب و حـ و ء و ... و ك معًا

$= م_1 \times م_2 \times م_3 \times .... \times م_ر$

- قاعدة الجمع :

عدد طرق إجراء العملية أ أو ب أو حـ أو ء .... أو ك

$= م_1 + م_2 + م_3 + ... + م_ر$

مثال

فى متجر لبيع الملابس كان هناك ٦ قمصان و٨ رابطات عنق مختلفة فإن عدد الطرق التى يمكن لشخص أن يشترى بها

(١) قميص و رابطة عنق

$= ٦ \times ٨ = ٤٨$

(٢) قميص أو رابطة عنق

$= ٦ + ٨ = ١٤$

التباديل

هى ترتيبات لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بأخذ نفس العدد منها فى كل مرة.

- $^{ن}ل_{ر}$ هو عدد الترتيبات المختلفة التى يمكن تكوينها من ن من الأشياء بحيث تحتوى كل ترتيب على ر من تلك الأشياء.

- $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) ..... (ن-ر+١)$

فمثلًا : $^{٧}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$

- $^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن-ر}$

فمثلًا : $^{٧}ل_{٣} = \frac{|٧}{|٤}$

مثال

عدد طرق ترتيب المراكز الثلاثة الأولى فى سباق للسباحة اشترك به سبعة سباحين

$= {}^{٧}ل_{٣} = ٢١٠$ طريقة.

التوافيق

هى مجموعات يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء المختلفة بأخذها كلها أو بأخذ نفس العدد منها فى كل مرة دون مراعاة الترتيب.

- $^{ن}ق_{ر}$ هو عدد المجموعات المختلفة التى يمكن تكوينها من ن من الأشياء بحيث تحتوى كل مجموعة على ر من العناصر.

- $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|ر}$

فمثلًا : $^{٧}ق_{٣} = \frac{^{٧}ل_{٣}}{|٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢} = ٣٥$

- $^{ن}ق_{ر} = \frac{|ن}{|ر \, |ن-ر}$

فمثلًا : $^{٧}ق_{٣} = \frac{|٧}{|٣ \, |٤} = ٣٥$

مثال

عدد طرق تكوين فريق من ثلاثة سباحين من بين سبعة سباحين

$= {}^{٧}ق_{٣} = ٣٥$ طريقة.

بكم طريقة يمكن ان..؟

مثال

من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}
بكم طريقة يمكن تكوين :

(١) عدد زوجي من ثلاثة أرقام.

(٢) عدد زوجي من ثلاثة أرقام مختلفة.

الحل

نحتاج اختيار

رقم آحاد زوجي ⓦ رقم عشرات ⓦ رقم مئات

(١) عدد الطرق = ٢ × ٥ × ٥ = ٥٠ عدد

(٢) عدد الطرق = ٢ × ٤ × ٣ = ٢٤ عدد

«لاحظ الاختيار للعملية المشروطة أولاً»

مثال

من مجموعة الأرقام {٠ ، ٦ ، ٥ ، ٤}
بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ أرقام مختلفة

الحل

نحتاج اختيار

رقم أحاد ⓦ رقم عشرات ⓦ رقم مئات ≠ صفر

∴ عدد الطرق

= طرق اختيار المئات × طرق اختيار الأحاد × طرق اختيار العشرات

= ٣ × ٣ × ٢

= ١٨ طريقة. «لاحظ الاختيار للعملية المشروطة أولاً»

مثال

إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}
فأوجد عدد عناصر كل من ص ، ع

حيث ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}

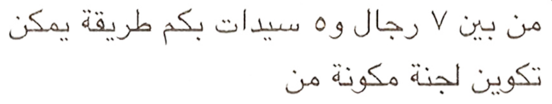
، ع = {{أ ، ب ، جـ} : أ ، ب ، جـ ∈ س}

الحل

ن(ص) = $ل^{٥}_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠

ن(ع) = $ق^{٥}_{٢}$ = $\frac{٥ × ٤ × ٣}{٣ × ٢}$ = ١٠

مثال



من بين ٧ رجال و٥ سيدات بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من

(١) رجلين وسيدتين.

(٢) ٤ أشخاص من نفس الجنس.

الحل

(١) عدد طرق اختيار رجلين من سبعة = $ق^{٧}_{٢}$ = ٢١

، عدد طرق اختيار سيدتين من خمسة

= $ق^{٥}_{٢}$ = ١٠

∴ عدد طرق تكوين لجنة من رجلين ⓦ سيدتين = ٢١ × ١٠ = ٢١٠ طريقة.

(٢) عدد طرق اختيار ٤ رجال من ٧ = $ق^{٧}_{٤}$ = ٣٥

، عدد طرق اختيار ٤ سيدات من ٥ = $ق^{٥}_{٤}$ = ٥

∴ عدد طرق اختيار لجنة من ٤ أشخاص من نفس الجنس أي ٤ رجال (أو) ٤ سيدات

= ٣٥ + ٥ = ٤٠

01100518441

مثال

بكم طريقة يمكن لـ ٥ طلاب أن يجلسوا فى ٧ مقاعد على شكل صف.

الحل

عدد الطرق = $^{٧}ل_{٥}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣

= ٢٥٢٠

مثال

مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة ، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين.

الحل

عدد طرق اختيار قائد و ٥ أعضاء

= ١٠ × $^{٩}ق_{٥}$ = ١٢٦٠

مثال

بكم طريقة يمكن اختيار طالبًا أو أكثر من بين ٥ طلاب.

الحل

العملية هى اختيار طالب أو طالبين أو ثلاثة طلاب أو أربعة طلاب أو خمسة طلاب من ٥ طلاب

∴ عدد الطرق = $^{٥}ق_{١}$ + $^{٥}ق_{٢}$ + $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$

= ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣١

مثال

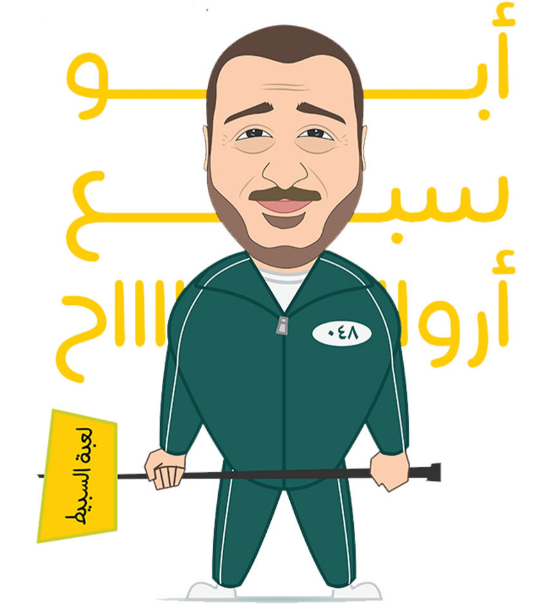
بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من ٥ أشخاص أن تتخذ قرارًا بالأغلبية.

الحل

قرار الأغلبية يكون بموافقة ٣ أو ٤ أو ٥ أشخاص من الخمسة

∴ عدد الطرق = $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$

= ١٠ + ٥ + ١ = ١٦ طريقة.



هنقفل ولا ايااااوع!؟



أولا: التفاضل و التكامل

معدل التغير

إذا كانت ص = د (س) وكانت $س_1$ ، $س_2$ قيم ثابتة فى مجال الدالة وكانت هـ قيمة متغيرة بحيث $س_1$ + هـ ∈ مجال الدالة وتغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ أ، من $س_1$ إلى $س_1$ + هـ فإنه يتبع ذلك تغير فى قيمة الدالة ومنه نجد أن :

مقدار التغير فى الدالة

$\Delta ص = د(س_2) - د(س_1)$

متوسط التغير فى الدالة

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1}$$

دالة التغير فى الدالة عند : $س = س_1$

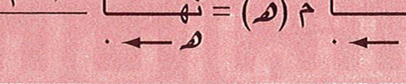
$ت(هـ) = د(س_1 + هـ) - د(س_1)$

دالة متوسط التغير فى الدالة عند : $س = س_1$

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

معدل التغير للدالة عند : $س = س_1$

$$\lim_{هـ \to 0} م(هـ) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$



مثال

إذا كانت : $د(س) = س^2 + 2س - 1$

أوجد : مقدار التغير فى د (س) عندما تتغير س من ٢ إلى ١,٨

الحل

$\Delta ص = د(1,8) - د(2)$

$= 5,84 - 7 = -1,16$

مثال

إذا كانت : $د(س) = س^2 - س + 1$

أوجد دالة التغير ت عند س = ٣ ومنها أوجد ت (٢ , ٠)

الحل

$ت(هـ) = د(3 + هـ) - د(3)$

$= (3 + هـ)^2 - (3 + هـ) + 1 - 7$

$= 5هـ + هـ^2$

، $ت(0,2) = 5(0,2) + (0,2)^2 = 1,04$

مثال

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{2} - 3\text{س}$

أوجد دالة متوسط التغير عند $\text{س} = 2$

ثم أوجد $\text{م}(0,1)$

الحل

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(2+\text{هـ}) - \text{د}(2)}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{(2+\text{هـ})^{2} - 3(2+\text{هـ}) + 2}{\text{هـ}}$$

$$= \text{هـ} + 1$$

$$\therefore \text{م}(0,1) = 1,1$$

مثال

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{2} + 2\text{س} - 3$

أوجد متوسط التغير للدالة د عندما تزداد س_1 بمقدار ٠,٥

الحل

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + 0,5) - \text{د}(\text{س}_1)}{0,5}$$

$$= \frac{(\text{س}_1+0,5)^{2} + 2(\text{س}_1+0,5) - 3 - [(0,5)^{2} + 2(0,5) - 3]}{0,5}$$

$$= \frac{\text{س}_1^{2} + 3\text{س}_1}{0,5} = 2\text{س}_1^{2} + 6\text{س}_1$$

مثال

إذا كان متوسط التغير فى د = ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ أوجد مقدار التغير فى د

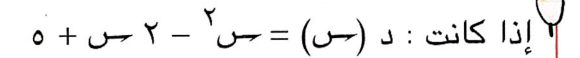
الحل

$$\because 2,4 = \frac{\text{د}(3,2) - \text{د}(3)}{3,2 - 3}$$

$$\therefore \text{د}(3,2) - \text{د}(3) = 0,48$$

∴ مقدار التغير فى د عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ = ٠,٤٨

مثال



إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{2} - 2\text{س} + 5$

أوجد معدل تغير الدالة عند $\text{س} = \text{س}_1$

ثم أوجد هذا المعدل عند $\text{س} = -3$

الحل

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

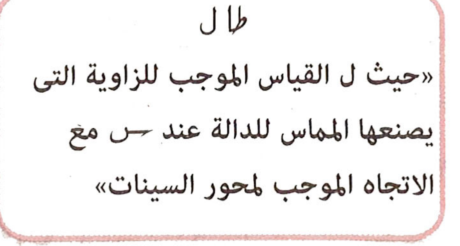
$$= \frac{1}{\text{هـ}}\left[(\text{س}_1+\text{هـ})^{2} - 2(\text{س}_1+\text{هـ}) + 5 - \text{س}_1^{2} + 2\text{س}_1 - 5\right]$$

$$= \frac{1}{\text{هـ}}\left[\text{هـ}^{2} + 2\text{س}_1\text{هـ} - 2\text{هـ}\right] = \text{هـ} + 2\text{س}_1 - 2$$

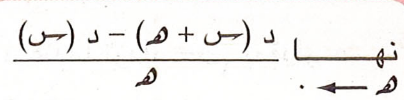
$$\therefore \text{معدل التغير عند س} = \text{س}_1 = \lim_{\text{هـ} \to 0} \text{م}(\text{هـ})$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} (\text{هـ} + 2\text{س}_1 - 2) = 2\text{س}_1 - 2$$

، معدل التغير عند $\text{س} = -3$ هو $2(-3) - 2 = -8$



المشتقة الأولى للدالة عند س



معدل التغير للدالة

د : د (س) = ص

عند س ∈ مجالها هو:

ميل المماس للمنحنى عند س

المعامل التفاضلى الأول

$\text{دَ}(\text{س}) = \text{صَ} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

مثال

باستخدام تعريف المشتقة أوجد المشتقة الأولى للدالة د : د (س) = ٣ س^{٢} − ٥ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (−٢ ، ٧)

الحل

المشتقة الأولى = $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \frac{٣(\text{س} + \text{هـ})^{٢} - ٥ - [٣\text{س}^{٢} - ٥]}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س}\,\text{هـ} + ٣\text{هـ}^{٢} - ٥ - ٣\text{س}^{٢} + ٥}{\text{هـ}} = \lim_{\text{س} \to 0} (٦\text{س} + ٣\text{هـ}) = ٦\text{س}$

، عند س = −٢ ∴ ميل المماس = ٦ × −٢ = −١٢

قابلية الاشتقاق

لبحث قابلية الاشتقاق للدالة د عند س = أ ∈ مجال الدالة

نبحث وجود

$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

فـإذا كانـت النهاية موجودة **فإن الدالة** د قابلة للاشتقاق عند أ

01100518441

لاحظ ان

لبحث وجود $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ للدالة مجزأة المجال والتى تغير قاعدتها يمين ويسار أ

فإننا نوجد النهايتين اليمنى واليسرى كالتالى :

(١) $\lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ وتسمى بالمشتقة اليمنى للدالة د عند س = أ ونرمز لها بالرمز $د'(أ^+)$

(٢) $\lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ وتسمى بالمشتقة اليسرى للدالة د عند س = أ ونرمز لها بالرمز $د'(أ^-)$

الاستنتاج : إذا كانت : $د'(أ^+) = د'(أ^-)$ فإن الدالة قابلة للاشتقاق عند س = أ

مثال

ابحث قابلية اشتقاق الدالة د : $د(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & ، س > 1 \\ 2س + 1 & ، س \le 1 \end{cases}$ عند س = ١

الحل

$د'(1^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(1 + هـ) - د(1)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{(1 + هـ)^2 + 2 - [(1)^2 + 2]}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{1 + 2هـ + هـ^2 + 2 - 3}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^+} (2 + هـ) = 2$

، $د'(1^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(1 + هـ) - د(1)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{2(1 + هـ) + 1 - [2(1) + 1]}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{2 + 2هـ + 1 - 3}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^-} 2 = 2$

$\therefore د'(1^+) = د'(1^-)$

$\therefore$ الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ١



الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة تكون متصلة عند هذة النقطة.

الدالة المتصلة عند نقطة ليست بالضرورة قابلة للاشتقاق عند هذة النقطة.

إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فهى قطعًا غير قابلة للاشتقاق عند هذة النقطة.

* مما سبق يفضل بحث اتصال الدالة عند النقطة قبل بحث قابلية اشتقاقها عند هذه النقطة.

مثال

ابحث اتصال الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٥ & ، \quad س < ٢ \\ ٤س - ٩ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

عند س = ٢ ثم ابحث قابلية الاشتقاق عند س = ٢ إذا كانت متصلة.

الحل

$\because$ د (٢^{+}) = د (٢) = ٤ (٢) − ٩ = −١ ، د (٢^{-}) = $٢^{٢}$ − ٥ = −١

$\therefore$ د متصلة عند س = ٢

، $\because$ $دَ(٢^{+}) = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{٤(٢ + هـ) - ٩ + ١}{هـ} = ٤$

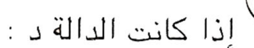
، $\because$ $دَ(٢^{-}) = \lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{(٢ + هـ)^{٢} - ٥ + ١}{هـ} = ٤$

$\therefore$ $دَ(٢^{+}) = دَ(٢^{-})$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢



01100518441



إذا كانت الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ١ &، \quad س \geq ٢ \\ ٤ س - ٣ &، \quad س < ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ أوجد أ وابحث قابلية الاشتقاق عند س = ٢

الحل

∵ د متصلة عند س = ٢ ∴ $د(٢^{+}) = د(٢^{-})$

∴ $أ(٢)^{٢} + ١ = ٤(٢) - ٣$ ∴ أ = ١

، ∵ $دَ(٢^{+}) = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^{+}} \frac{(٢ + هـ)^{٢} + ١ - ٥}{هـ} = ٤$

، $دَ(٢^{-}) = \lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^{-}} \frac{٤(٢ + هـ) - ٣ - ٥}{هـ} = ٤$

∴ $دَ(٢^{+}) = دَ(٢^{-})$ ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال

أوجد قيمة ك إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ حيث

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س + ٣ &، \quad س < ٢ \\ ك س^{٢} + ٦ س - ١ &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

الحل

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ د متصلة عند س = ٢

∴ $د(٢^{+}) = د(٢^{-})$

∴ $ك \times ٢^{٢} + ٦(٢) - ١ = ٢ \times ٢ + ٣$

∴ ك = −١

مثال

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س - ٥ &، \quad س \geq ٢ \\ ٢ س + ٥ &، \quad س < ٢ \end{cases}$$

عند س = ٢

الحل

$د(٢^{+}) = ٢(٢) - ٥ = -١$

، $د(٢^{-}) = ٢(٢) + ٥ = ٩$

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

قواعد الاشتقاق

مشتقة دالة القوى

- د(س) = $س^{ن}$
- ∴ دَ(س) = $ن س^{ن-1}$
- د(س) = $أ س^{ن}$
- ∴ دَ(س) = $ن أ س^{ن-1}$

مشتقة الدالة الثابتة

د(س) = أ

∴ دَ(س) = صفر

مشتقة مجموع أو فرق بين دالتين

- د(س) = ر(س) ± ع(س)
- ∴ دَ(س) = رَ(س) ± عَ(س)

وبصفة عامة :

- د(س) = ر(س) ± ع(س) ± ك(س) ± ... ± ن(س)
- ∴ دَ(س) = رَ(س) ± عَ(س) ± كَ(س) ± ... ± نَ(س)

مشتقة حاصل ضرب دالتين

- د(س) = ر(س) × ع(س)
- ∴ دَ(س) = ر(س) × عَ(س) + ع(س) × رَ(س)

= الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

وبصفة عامة :

- د(س) = ر(س) × ع(س) × ك(س)
- ∴ دَ(س) = رَ(س) × ع(س) × ك(س) + ر(س) × عَ(س) × ك(س) + ر(س) × ع(س) × كَ(س)

مشتقة خارج قسمة دالتين

د(س) = $\frac{ر(س)}{ع(س)}$

∴ دَ(س) = $\frac{ع(س) \times رَ(س) - ر(س) \times عَ(س)}{[ع(س)]^{2}}$

= $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{2}}$



القواعد دي 20٪ ليكرا

امثلة

إذا كانت : $د(س) = \sqrt{٢}$ فإن $دَ(س) =$ صفر

إذا كانت : $ص = س^{-٣}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = -٣ س^{-٤}$

إذا كان : $ق(س) = ٤ س^{\frac{١}{٢}}$ فإن :

$قَ(س) = ٢ س^{-\frac{١}{٢}}$

إذا كانت : $د(س) = ٣ س^{٥} - ٤ س + ٥$

فإن : $دَ(س) = ١٥ س^{٤} - ٤$

إذا كانت : $ص = (٣ س - ٢)(٥ س^{٢} + ٤ س)$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = (٣ س - ٢)(١٠ س + ٤)$

$+ (٥ س^{٢} + ٤ س) \times ٣$

إذا كانت $د(س) = \frac{٣ س - ٤}{٢ س + ٥}$

فإن : $دَ(س) = \frac{(٢ س + ٥) \times ٣ - (٣ س - ٤) \times ٢}{(٢ س + ٥)^{٢}}$

مشتقة دالة الدالة



قاعدة السلسلة

إذا كانت : $ص = د(ع)$ ، $ع = ر(س)$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

مشتقة : $[د(س)]^{ن}$

إذا كانت : $ص = [د(س)]^{ن}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ن [د(س)]^{ن-١} \times دَ(س)$

أى أن : مشتقة $(قوس)^{ن} = ن \times (القوس)^{ن-١} \times$ مشتقة ما بداخل القوس.

مشتقة $ص^{ن}$

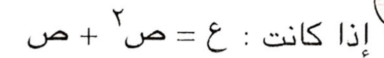
إذا كان : ص دالة فى س

فإن : $\frac{ء}{ءس}(ص^{ن}) = ن ص^{ن-١} \times \frac{ءص}{ءس}$

مشتقة الجذر التربيعي

إذا كانت : $ص = \sqrt{د(س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{د(س)}} \times دَ(س)$

أى أن : مشتقة الجذر التربيعى $= \frac{١}{٢ (الجذر)} \times$ مشتقة ما تحت الجذر



مثال

إذا كانت : $\text{ع} = \text{ص}^2 + \text{ص}$

، $\text{ص} = \text{س}^2 - 4\,\text{س} + 7$ أوجد

: $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = 0$

الحل

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = 2\,\text{ص} + 1$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{س} - 4$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$= (2\,\text{ص} + 1) \times (2\,\text{س} - 4)$

، عند $\text{س} = 0$ فإن : $\text{ص} = 7$

$\therefore \left(\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=0} = 15 \times -4 = -60$

مثال

إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{ع} + 3}{\text{ع} - 1}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 3}$

أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما $\text{س} = 4$

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{(\text{ع} - 1) - (\text{ع} + 3)}{(\text{ع} - 1)^2} = \frac{-4}{(\text{ع} - 1)^2}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - 3) - (\text{س} + 1)}{(\text{س} - 3)^2} = \frac{-4}{(\text{س} - 3)^2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{16}{(\text{ع} - 1)^2(\text{س} - 3)^2}$

، عند $\text{س} = 4$ فإن : $\text{ع} = 5$

$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س}=4} = \frac{16}{16 \times 1} = 1$



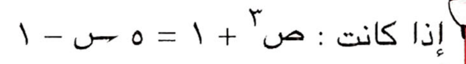
مثال

إذا كانت : $\text{ص} = (\text{س}^3 + 2\,\text{س} - 3)^5$

أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5\,(\text{س}^3 + 2\,\text{س} - 3)^4\,(3\,\text{س}^2 + 2)$



مثال

إذا كانت : $\text{ص}^3 + 1 = 5\,\text{س} - 1$

أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$\text{ص}^3 = 5\,\text{س} - 2$

$\therefore 3\,\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5$ $\quad\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{5}{3\,\text{ص}^2}$

مثال

إذا كانت : $\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 3}\right)^5$ **أوجد :** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5\left(\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 3}\right)^4 \times \left(\frac{(\text{س} - 3) \times 2\,\text{س} - (\text{س}^2 + 1)}{(\text{س} - 3)^2}\right) = \frac{5\,(\text{س}^2 + 1)^4 \times (\text{س}^2 - 6\,\text{س} - 1)}{(\text{س} - 3)^6}$

تطبيقات على المشتقة الأولى

ميل المماس و ميل العمودي عليه لمنحنى

إذا كانت د دالة حيث ص = د (س) ، أ (س$_1$ ، ص$_1$) نقطة على منحنى الدالة فإن :

1. ميل المماس للمنحنى عند أ (س$_1$ ، ص$_1$) = $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = س_1}$
2. ميل العمودى على المنحنى عند أ (س$_1$ ، ص$_1$) = −١ ÷ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = س_1}$

معادلة المستقيم الذى ...

يمر بالنقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)	ميله م ويمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$)	ميله م ويقطع محور الصادات فى (٠ ، حـ)	يقطع محورى الإحداثيات فى (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)
هى	هى	هى	هى
$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$	ص − ص$_1$ = م (س − س$_1$)	ص = م س + حـ	$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

ميل المستقيم الذى ...

معادلته أ س + ب ص + حـ = ٠	يصنع زاوية موجبة قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	متجه ى = (أ ، ب) هو متجه اتجاه له	يمر بالنقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)	يوازى محور السينات	يوازى محور الصادات
=	=	=	=	=	يكون
$\frac{-أ}{ب}$	طا هـ	$\frac{ب}{أ}$	$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$	صفر	غير معرف

ملاحظات

① إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما معرفين $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن :

• **إذا كان :** $ل_١ // ل_٢$ ⟵ فإن ⟶ $م_١ = م_٢$ **والعكس صحيح**

• **إذا كان :** $ل_١ \perp ل_٢$ ⟵ فإن ⟶ $م_١ \times م_٢ = -١$ **والعكس صحيح**

② معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى ص = ك

③ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى س = ل

④ معادلة محور السينات هى ص = ٠

⑤ معادلة محور الصادات هى س = ٠

⑥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى ص = م س حيث م ميل المستقيم

⑦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

⑧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

⑨ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

مثال

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د حيث :

$د(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣ ، ٦)

الحل

$د'(س) = \frac{(س - ٢) - (س + ٣)}{(س - ٢)^٢} = \frac{-٥}{(س - ٢)^٢}$

∴ $د'(٣) = \frac{-٥}{(٣ - ٢)^٢} = -٥$

∴ ميل المماس للمنحنى عند (٣ ، ٦) = -٥

∴ ظا هـ = -٥ ∴ هـ = ١٠١ْ ١٩َ

مثال

إذا كان المستقيم : ص = ٨ س + ٥ يمس المنحنى $ص = أ س^٢ + ب س$ عند النقطة (-١ ، -٣) ، أوجد قيمتى أ ، ب

الحل

∵ (-١ ، -٣) تقع على المنحنى

∴ $-٣ = أ(-١)^٢ + ب(-١)$

∴ أ - ب = -٣ (١)

، ∵ ميل المماس للمنحنى = ص' = ٢ أ س + ب

، ∵ المستقيم : ص = ٨ س + ٥ يمس المنحنى عند (-١ ، -٣)

∴ ميل المستقيم = $(ص')_{س=-١}$ = ٨

∴ ٨ = -٢ أ + ب (٢)

بحل (١) ، (٢) : ∴ أ = -٥ ، ب = -٢

01100518441



مثال

أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى د (س) = ٢ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٣ عند س = ٢

الحل

د (٢) = ٢ (٢)^{٣} − ٤ (٢)^{٢} + ٣ = ٣

∴ النقطة (٢ ، ٣) تقع على المنحنى

، ∵ دَ (س) = ٦ س^{٢} − ٨ س

∴ عند النقطة (٢ ، ٣)

ميل المماس = ٦ (٢)^{٢} − ٨ (٢) = ٨

، ميل العمودى = − $\frac{١}{٨}$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٣ = ٨ (س − ٢)

أى أن : ص − ٨ س + ١٣ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٣ = − $\frac{١}{٨}$ (س − ٢)

أى أن : ٨ ص + س − ٢٦ = ٠

مثال

أوجد النقط الواقعة على المنحنى الذى معادلته ص = س^{٢} − ٤ س والتى يكون المماس للمنحنى عندها.

(١) موازيًا محور السينات.

(٢) عموديًا على المستقيم : ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

الحل

ميل المماس للمنحنى المعطى = $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س − ٤

(١) المماس للمنحنى يوازى محور السينات

∴ ميل المماس = صفر

∴ ٢ س − ٤ = ٠ ∴ س = ٢

ومنها ص = (٢)^{٢} − ٤ (٢) = −٤

∴ النقطة هى : (٢ ، −٤)

(٢) ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل المماس = −٢

∴ ٢ س − ٤ = −٢ ∴ س = ١

ومنها ص = (١)^{٢} − ٤ (١) = −٣

∴ النقطة هى : (١ ، −٣)

التكامل

- **التكامل** هو عملية عكسية للتفاضل أو الاشتقاق.
- **تسمى** الدالة الناتجة من عملية التكامل بالمشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة.
- **إذا كانت** الدالة ت : ت (س) مشتقة عكسية للدالة د : د (س) فإن :

• ت (س) هى تكامل د (س) بالنسبة لـ س وتكتب رمزيًا ت (س) = $\int$ د (س) ءس

• تَ (س) = د (س) أى أن $\frac{ء}{ءس}$ $\int$ د (س) = د (س)

• $\int$ $\frac{ء}{ءس}$ [ت (س)] ءس = ت (س) + ث

01100518441

خواص التكامل

* $\int أ\,د(س)\,ءس = أ \int د(س)\,ءس$ حيث أ ثابت $\neq$ صفر
* $\int [د(س) \pm ر(س)]\,ءس = \int د(س)\,ءس \pm \int ر(س)\,ءس$

ويمكن تعميمها كالتالى : $\int [د(س) \pm ر(س) \pm \dots \pm ن(س)]\,ءس$

$= \int د(س)\,ءس \pm \int ر(س)\,ءس \pm \dots \pm \int ن(س)\,ءس$

قواعد التكامل

إذا كانت د : د(س) دالة فى س ، ث ، ن ثابتان بحيث $ن \neq -١$ فإن :

* $\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$

نضيف «١» على الأس ثم نقسم على الأس الجديد

* $\int [د(س)]^{ن}\,دَ(س)\,ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

تكامل حاصل ضرب قوس فى مشتقة ما بداخل القوس
نضيف «١» إلى أس القوس ونقسم على الأس الجديد

* $\int (أس + ب)^{ن}\,ءس = \frac{١}{أ} \times \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١} + ث$

أمثلة لبعض التكاملات

* $\int ٥\,ءس = ٥س + ث$
* $\int \frac{س}{\sqrt{س}}\,ءس = \int س^{\frac{١}{٢}}\,ءس = \frac{٢}{٣}\,س^{\frac{٣}{٢}} + ث$
* $\int (س^{٢} + ٢س)\,ءس = \frac{١}{٣}\,س^{٣} + س^{٢} + ث$
* $\int (س - ١)(س + ٢)\,ءس = \int (س^{٢} + س - ٢)\,ءس = \frac{١}{٣}\,س^{٣} + \frac{١}{٢}\,س^{٢} - ٢س + ث$
* $\int \frac{س^{٢} - ٥س}{س}\,ءس = \int (س - ٥)\,ءس = \frac{١}{٢}\,س^{٢} - ٥س + ث$
* $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢س + ٤}\,ءس = \int \frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)}{س^{٢} - ٢س + ٤}\,ءس = \int (س + ٢)\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\,س^{٢} + ٢س + ث$

* $\int (٧ - ٣س)^{٥}\,ءس = \frac{١}{-٣} \times \frac{(٧ - ٣س)^{٦}}{٦} + ث = -\frac{١}{١٨}\,(٧ - ٣س)^{٦} + ث$



• $\int (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٧} (٢س - ٣) \, ءس = \frac{-١}{٦} (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٦} + ث$

حاصل ضرب قوس فى مشتقة ما بداخل القوس

• $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣} + ١)^{٥}} \, ءس = \frac{١}{٣} \int ٣س^{٢} (س^{٣} + ١)^{-٥} \, ءس = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{-٤} \times (س^{٣} + ١)^{-٤} + ث$

• $\int \frac{ء}{ءس} \left(٥ \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤س \right) ءس = ٥ \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤س + ث$

• $\frac{ء}{ءس} \int \left(٥ \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤س \right) ءس = ٥ \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤س$

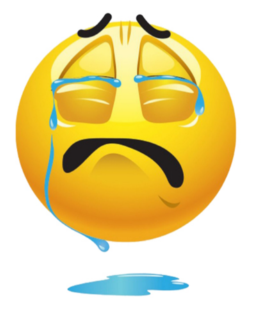
• $\int \sqrt{س - ٣} \, (س - ٣)^{٤} \, ءس = \int (س - ٣)^{٤\frac{١}{٢}} \, ءس = \frac{٢}{١١} (س - ٣)^{٥\frac{١}{٢}} + ث$

• $\int \frac{س + ٣}{(س - ٣)^{٤}} \, ءس = \int \frac{س - ٣ + ٦}{(س - ٣)^{٤}} \, ءس = \int \frac{س - ٣}{(س - ٣)^{٤}} \, ءس + \int \frac{٦}{(س - ٣)^{٤}} \, ءس$

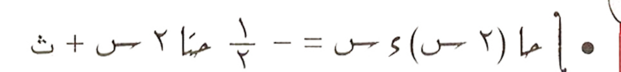
$= \int (س - ٣)^{-٣} \, ءس + ٦ \int (س - ٣)^{-٤} \, ءس$

$= -\frac{١}{٢} (س - ٣)^{-٢} - ٢ (س - ٣)^{-٣} + ث$

يا خاااالي... ياعوووض........ودوني الورشة







- $\int$ جا (٢س) ء س = − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ث
- $\int$ (جتا س − جا $\frac{\pi}{٣}$) ء س = جا س − جا $\frac{\pi}{٣}$ × س + ث «لاحظ أن جا $\frac{\pi}{٣}$ قيمة ثابتة»
- $\int$ (جتا ٢س − ٣ قا^{٢} س) ء س = $\frac{١}{٢}$ جا ٢س − ٣ طا س + ث
- $\int$ (جا س − جتا س)^{٢} ء س = $\int$ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س − ٢ جا س جتا س) ء س

  = $\int$ (١ − جا ٢س) ء س = س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + ث
- $\int$ ٣ (قا ٣س − ١) (قا ٣س + ١) ء س = $\int$ ٣ (قا^{٢} ٣س − ١) ء س = $\int$ (٣ قا^{٢} ٣س · ٣ − ٣) ء س

  = طا ٣س − ٣س + ث
- $\int$ $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + جا س}}$ ء س = $\int$ $\frac{\text{١ − جا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + جا س}}$ ء س = $\int$ $\frac{\text{(١ − جا س) (١ + جا س)}}{\text{١ + جا س}}$ ء س = $\int$ (١ − جا س) ء س

  = س + جتا س + ث
- $\int$ جا^{٢} س ء س = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) ء س = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢س + ث
- $\int$ (جتا س جتا $\frac{\pi}{٤}$ − جا س جا $\frac{\pi}{٤}$) ء س = $\int$ جتا (س + $\frac{\pi}{٤}$) ء س = جا (س + $\frac{\pi}{٤}$) + ث
- $\int$ (١ − جتا س)^{٢} ء س = $\int$ (١ − ٢ جتا س + جتا^{٢} س) ء س

  = $\int$ (١ − ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) ء س

  = $\int$ (١$\frac{١}{٢}$ − ٢ جتا س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س) ء س

  = ١$\frac{١}{٢}$ س − ٢ جا س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢س + ث







مراجعة عامة على الاحتمال

الاحتمال

التجربة العشوائية : هى تجربة يمكن معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها لكن لا نستطع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجرائها.

فضاء العينة (فضاء النواتج) : هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ويرمز لها بالرمز (ف)

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

وقوع الحدث : يقال أن حدثًا ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية أحد عناصر المجموعة التى يتألف منها هذا الحدث.

الحدث المؤكد (ف) : هو حدث لابد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

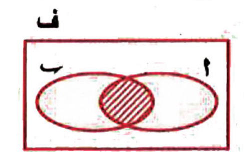
الحدث المستحيل (∅) : هو حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

الحدث الأولى أو البسيط : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى على عنصر واحد فقط.

العمليات على الأحداث :

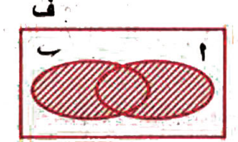
① تقاطع حدثين (أ ∩ ب)

* هو حدث وقوع أ و ب معًا.
* هو حدث وقوع الحدثين معًا.



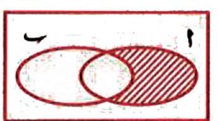
② اتحاد حدثين (أ ∪ ب)

* هو حدث وقوع أ أو ب أو كليهما.
* هو حدث وقوع أحدهما على الأقل.



③ الفرق بين حدثين (أ − ب)

* هو حدث وقوع أ فقط
* هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب
* أ − ب = أ ∩ بَ



④ الحدث المكمل (أَ)

* هو حدث عدم وقوع أ

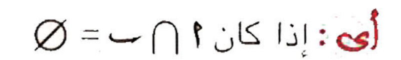


⑤ قانونا دى مورجان : • (أ ∩ ب)َ = أَ ∪ بَ • (أ ∪ ب)َ = أَ ∩ بَ

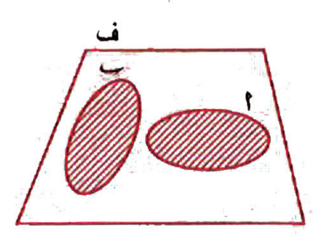
01100518441

الأحداث المتنافية :

- يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر



أى : إذا كان أ $\cap$ ب = $\emptyset$



- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

ملاحظة

* الأحداث البسيطة (الأولية) المختلفة فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.
* الحدث أ ومكمله أَ حدثان متنافيان ويكون :

(١) أ $\cap$ أَ = $\emptyset$ (الحدث المستحيل) (٢) أ $\cup$ أَ = ف (الحدث المؤكد)

مثال

حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة ، **اكتب الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠».

(٢) ب حدث «العدد المسجل عامل من عوامل ١٢».

(٣) حـ حدث «العدد المسجل فردى ويقبل القسمة على ٣».

(٤) ء حدث «العدد المسجل مضاعف مشترك للعددين ٢ ، ٥».

(٥) هـ حدث «العدد المسجل أولى».

(٦) و حدث «العدد المسجل يحقق المتباينة : ٥ س − ٣ $\leq$ ١٧».

الحل

(١) أ = {١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٠}

(٢) ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢}

(٣) حـ = {٣ ، ٩ ، ١٥}

(٤) ء = {١٠ ، ٢٠}

(٥) هـ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩}

(٦) ∵ ٥ س − ٣ $\leq$ ١٧ ∴ ٥ س $\leq$ ٢٠

∴ س $\leq$ ٤ ∴ و = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

مثال

من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كوِّن عددًا من رقمين مختلفين.

مثِّل فضاء النواتج ف بشكل شجرة ، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «أن يكون رقم الآحاد فرديًا».

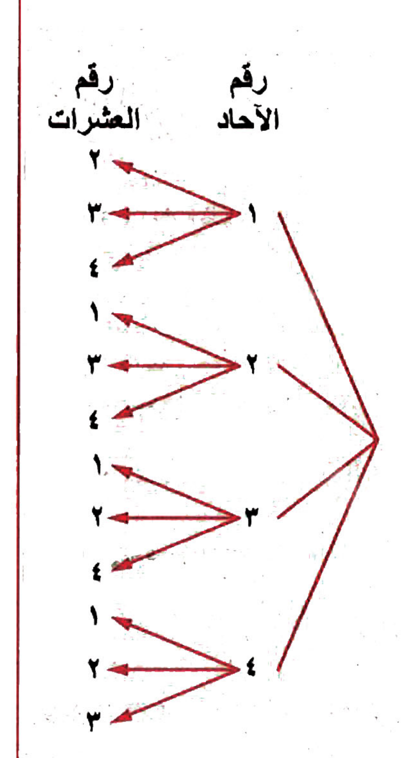
(٢) ب حدث «أن يكون رقم العشرات فرديًا».

(٣) حـ حدث «أن يكون كلا الرقمين فرديًا».

(٤) ء حدث «أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًا».

(٥) هـ حدث «مجموعة الأعداد التى بها الآحاد ضعف العشرات».

الحل



ف = {٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤}

(١) أ = {٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣}

(٢) ب = {٣١ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤}

(٣) حـ = أ ∩ ب = {٣١ ، ١٣}

(٤) ء = أ ∪ ب = {٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ١٢ ، ١٤}

(٥) هـ = {١٢ ، ٢٤}

مثال

ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد ،

مثِّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجى».

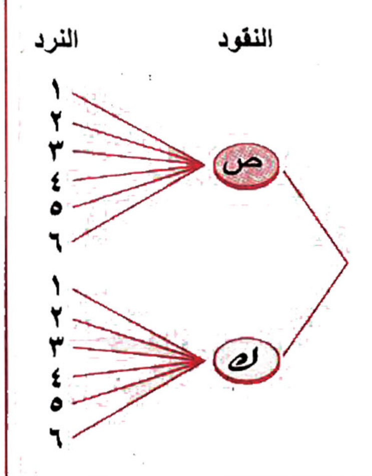
(٢) ب حدث «ظهور صورة وعدد فردى».

(٣) حـ حدث «وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب».

(٤) ء حدث «وقوع الحدث أ فقط».

(٥) هـ حدث «عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب».

الحل



(١) أ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

(٢) ب = {(ص ، ١) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٥)}

(٣) حـ = أ ∩ ب = ∅

(٤) ء = أ − ب = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

(٥) هـ = أَ ∪ بَ = (أ ∩ ب)َ = ∅َ = ف

مثال

عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات وتوقفت التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات

اكتب فضاء النواتج ثم عيِّن الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور صورة على الأكثر».

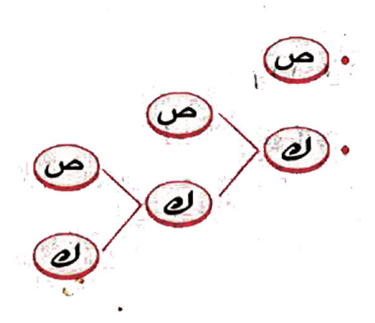
(٢) ب حدث «ظهور صورة على الأقل».

(٣) حـ حدث «ظهور كتابتين على الأقل».

(٤) ء حدث «ظهور صورتين على الأقل».

الحل

ف = {ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}



(١) أ = ف

(٢) ب = {ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص)}

(٣) حـ = {(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

(٤) ء = ∅

حساب الاحتمال

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات ،

فإن احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف يعطى بالقانون :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

أى أن :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

01100518441

مسلمات وقوانين الاحتمال

① لكل حدث أ ⊂ ف يكون : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١ **أى أن** : ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

② ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

③ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

والجدول الآتى يلخص لنا احتمالات بعض الأحداث :

احتمال الحدث	التعبير عنه لفظيًا	تمثيل الحدث بشكل فن
ل (ف)	* احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	ف
ل (∅)	* احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	ف
ل (أ)	* احتمال وقوع الحدث أ	ف، أ
ل (أَ) = ل (ف − أ) = ١ − ل (أ)	* احتمال الحدث المكمل للحدث أ * احتمال عدم وقوع الحدث أ	ف، أ
ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ ، ب معًا.	ف، أ، ب
ل (أ ∪ ب)	* احتمال وقوع أ أو ب أو كليهما. * احتمال وقوع أحدهما على الأقل. * احتمال وقوع أى من الحدثين.	ف، أ، ب
ل (أ − ب) = ل (أ ∩ بَ) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب * احتمال وقوع أ فقط.	ف، أ، ب
ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب)	* احتمال عدم وقوع الحدثين معًا. * احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.	ف، أ، ب

ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)	* احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. * احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب	ف أ ب
ل (أَ ∪ ب) = ل (أ − ب)َ	* احتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ * احتمال عدم وقوع أ فقط.	ف أ ب
ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	ف أ ب

مثال

إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ **أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :**

(١) وقوع أ ، ب معًا. (٢) وقوع أ وعدم وقوع ب (٣) وقوع أ أو ب فقط.

الحل

∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ $\frac{٧}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ − ل (أ ∩ ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ − $\frac{٧}{١٢}$ = $\frac{١}{٦}$

(١) احتمال وقوع أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

(٢) احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب = ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(٣) احتمال وقوع أ أو ب فقط = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{١٢}$

مثال

إذا كان أ ، ب حدثين فى ف لتجربة عشوائية ما وكان : ل (أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$

، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$ **أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :**

(١) أحدهما على الأقل. (٢) ب فقط (٣) عدم وقوع أ أو ب

الحل

(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١١}{١٢}$

(٢) احتمال وقوع ب فقط = ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

(٣) احتمال عدم وقوع أ أو ب = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − $\frac{١١}{١٢}$ = $\frac{١}{١٢}$

مثال

أ ، ب حدثان من فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث : ل (أَ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$

فأوجد ل (ب) فى كل من الحالتين :

(١) أ ، ب حدثان متنافيان. (٢) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

الحل

ل (أ) = ١ − ل (أَ) = ١ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

(١) ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) ∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٥}{٨}$ + ل (ب) ∴ ل (ب) = $\frac{١}{٨}$

(٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٥}{٨}$ + ل (ب) − $\frac{١}{٨}$ ∴ ل (ب) = $\frac{١}{٤}$

مثال

إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف

، ل (ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (أ) ، ل (أ − ب) = ٠,٢٤ ، ل (ب ∩ أَ) = ٠,١٥

، **أوجد :** ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أَ ∪ بَ)

الحل

∵ ل (أ − ب) = ٠,٢٤ ∴ ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٢٤

∴ ل (أ) = ٠,٢٤ + ل (أ ∩ ب) (١)

، ∵ ل (ب ∩ أَ) = ل (ب − أ) = ٠,١٥

∴ ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,١٥ ∴ ل (ب) = ٠,١٥ + ل (أ ∩ ب) (٢)

من (١) ، (٢) : ، ∵ ل (ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (أ) ∴ $\frac{٤}{٥}$ (٠,٢٤ + ل (أ ∩ ب)) = ٠,١٥ + ل (أ ∩ ب)

∴ ٠,٧٥ + ٥ ل (أ ∩ ب) = ٠,٩٦ + ٤ ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٢١ ∴ ل (أ) = ٠,٢٤ + ٠,٢١ = ٠,٤٥

، ل (ب) = ٠,١٥ + ٠,٢١ = ٠,٣٦

∴ ل (أَ ∪ بَ) = ل $\overline{(أ ∩ ب)}$ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٢١ = ٠,٧٩

مثال

إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان الرياضيات ٠,٨٥ واحتمال نجاحه فى امتحان الإحصاء ٠,٩

واحتمال نجاحه فى الامتحانين معًا ٠,٨ **أوجد احتمال :**

(١) نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل.

(٢) نجاح الطالب فى امتحان الإحصاء فقط.

(٣) عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا.

الحل

بفرض أن : حدث نجاح الطالب فى الرياضيات = أ ، حدث نجاح الطالب فى الإحصاء = ب

∴ ل (أ) = ٠,٨٥ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٨

(١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٨٥ + ٠,٩ − ٠,٨ = ٠,٩٥

(٢) ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٩ − ٠,٨ = ٠,١

(٣) ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

مثال

إذا كان ف = {أ ، ب ، حـ ، ء} فضاء عينة لتجربة عشوائية **أوجد :**

ل (أ) ، ل (ب) إذا كان : ل (أ) = ٣ ل (ب) ، ل (حـ) = ل (ء) = $\frac{٧}{١٨}$

الحل

ل (أ) + ل (ب) + ل (حـ) + ل (ء) = ١

، ∵ ل (أ) = ٣ ل (ب) ، ل (حـ) = ل (ء) = $\frac{٧}{١٨}$

∴ ٣ ل (ب) + ل (ب) + $\frac{٧}{١٨}$ + $\frac{٧}{١٨}$ = ١

∴ ٤ ل (ب) = ١ − $\frac{١٤}{١٨}$ = $\frac{٢}{٩}$

∴ ل (ب) = $\frac{١}{١٨}$

، ل (أ) = ٣ × $\frac{١}{١٨}$ = $\frac{١}{٦}$